ISSN 1561-5359. Штучний інтелект, 2016, № 4

УДК 004.42:510.69

С.С. Шкільняк, Д.Б. Волковицький
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна
вул. Володимирська, 60, м. Київ, 01601

СЕКВЕНЦІЙНІ ЧИСЛЕННЯ ЛОГІК БЕЗКВАНТОРНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНІВ

S. Shkilniak, D. Volkovytskyi
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine
60, Volodymyrska st., Kyiv, 01601

SEQUENT CALCULI FOR LOGICS OF FREE-QUANTIFER FUNCTIONAL LEVELS

Для безкванторно-функціональних логік та їх різновидів зі слабкою рівністю та строгою рівністю побудовано числення секвенційного типу. Такі числення формалізують відношення неспростовнісного, істиннісного, хибнісного та сильного логічного наслідку. Для цих числень доведено теореми коректності й повноти. На базі теорем повноти отримано алгоритмічну розв’язність проблем наявності логічного наслідку для скінчених множин формул, проблем неспростовності та тотожної істинності для формул.

Ключові слова: логіка, безкванторно-функціональний рівень, секвенційне числення, повнота.

In this paper we specify sequent calculi for free-quantifier functional logics and their variants with weak and strong equality. The introduced calculi formalize irrefutability, truth, falsity and strong logical consequence relations. For the proposed calculi we prove the soundness and completeness theorems. On the base of the completeness theorems we obtain an algorithmic solvability of problems of existence of logical consequence for finite sets of formulas, irrefutability problems and identically truth problems for formulas.

Key words: logic, free-quantifier functional level, sequent calculus, completeness.

Вступ

Поняття і методи математичної логіки доводять свою ефективність при розв'язанні широкого кола задач інформатики. Розроблено [1] багато різноманітних логічних систем, які успішно використовуються в програмуванні й моделюванні. Такі системи зазвичай базуються на класичній логіці предикатів. Проте, класична логіка має [2] низку обмежень, що виводить на перший план проблему побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів. Таку побудову доцільно вести на базі спільного для логіки й програмування композиційно-номінативного підходу. Логіки, збудовані на його основі, названо композиційно-номінативними (КНЛ). Дослідженню КНЛ безкванторно-функціональних рівнів присвячена ця робота. Такі логіки займають проміжне становище між пропозиційною логікою і першопорядковими КНЛ та є розширенням реномінативних логік.

Можна виділити такі рівні безкванторно-функціональних логік.

– рівень безкванторно-функціональних логік (БКФЛ);

– рівень безкванторно-функціональних логік зі слабкою рівністю (БКФЛР);

– рівень безкванторно-функціональних логік зі строгою рівністю (БКФЛРС).

Семантичні властивості безкванторно-функціональних логік вивчалися в [3], [4]. У цих роботах описано композиції суперпозиції та слабкої і строгої рівності, розглянуто семантичні моделі та мови, досліджено властивості відношень неспростовнісного $|=_{IR}$, істиннісного $|=_{T}$, хибнісного $|=_{F}$, сильного $|=_{TF}$ логічного наслідку.

Метою даної роботи є побудова секвенційних числень безкванторно-

функціональних логік часткових квазіарних предикатів. Такі числення формалізують властивості відповідних відношень логічного наслідку для множин формул. Для пропонованих числень наведено базові секвенційні форми та умови замкненості секвенцій, для цих числень доведено теореми коректності та повноти.

Секвенційні числення безкванторно-функціональних логік можна розглядати як фрагменти відповідних числень першопорядкових логік квазіарних предикатів функціональних рівнів. Такі першопорядкові числення побудовано [2] для відношення $|=_{IR}$ логік еквітонних предикатів функціонального рівня та функціонального-еквацийного рівня з композицією слабкої рівності. Проте трактувати пропоноване тут числення FC_E для безкванторно-функціональних логік зі слабкою рівністю як фрагмент описаного в [2] відповідного першопорядкового числення *FZNE* можна з певним обмеженням: у [2] числення з рівністю розглядаються як окремий випадок прикладних секвенційних числень із множиною власних аксіом для композиції рівності, а в пропонованих тут численнях властивості композиції рівності описуються за допомогою відповідних секвенційних форм.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в роботах [2], [4], [5].

Умови замкненості секвенцій та базові секвенційні форми

Секвенції трактуємо як множини формул, специфікованих символами $\vdash$ та $\dashv$. Секвенційні числення будуємо так: секвенція $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ вивідна $\Leftrightarrow$ $\Gamma\,|=\Delta$. Секвенція Σ вивідна, якщо існує замкнене секвенційне дерево (кожний його лист – замкнена секвенція) з коренем Σ. Замкненість $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ означає $\Gamma\,|=\Delta$. Секвенційне числення задається базовими секвенційними формами та умовами замкненості секвенції.

Базова умова замкненості секвенції $\vdash\Gamma\dashv\Delta$:

C) існує формула Φ така, що $\Phi\in\Gamma$ та $\Phi\in\Delta$.

Наступні додаткові умови замкненості $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ істотні для $|=_{TF}$, $|=_T$, $|=_F$:

CL) існує формула Φ: $\Phi\in\Gamma$ та $\neg\Phi\in\Gamma$;

CR) існує формула Φ: $\Phi\in\Delta$ та $\neg\Phi\in\Delta$;

CLR) існують формули Φ та Ψ такі: $\Phi\in\Gamma$, $\neg\Phi\in\Gamma$, $\Psi\in\Delta$, $\neg\Psi\in\Delta$.

На ***рівні БКФЛ*** отримуємо такі секвенційні числення.

Числення *FLR* формалізує $|=_{TF}$. Умова замкненості секвенції: $C\vee CLR$.

Числення *FL* формалізує $|=_T$. Умова замкненості секвенції: $C\vee CL$.

Числення *FR* формалізує $|=_F$. Умова замкненості секвенції: $C\vee CR$.

Числення *FC* формалізує $|=_{IR}$. Умова замкненості секвенції: C.

Базові секвенційні форми цих числень індукуються властивостями відповідних відношень логічного наслідку для множин формул (див. [4]).

Опишемо базові секвенційні форми числень *FLR*, *FL*, *FR*.

Нехай Ψ отримана з Φ згорткою суперпозицій згідно з $SS\Phi$. Маємо форми:

$$\vdash SS\Phi\ \frac{\vdash\Psi,\Sigma}{\vdash\Phi,\Sigma};\qquad \dashv SS\Phi\ \frac{\dashv\Psi,\Sigma}{\dashv\Phi,\Sigma};$$

$$\vdash\neg SS\Phi\ \frac{\vdash\neg\Psi,\Sigma}{\vdash\neg\Phi,\Sigma};\qquad \dashv\neg SS\Phi\ \frac{\dashv\neg\Psi,\Sigma}{\dashv\neg\Phi,\Sigma}.$$

Секвенційні форми для пронесення суперпозицій через $\neg$ та $\vee$:

$$_{\vdash}\mathrm{S}\neg\ \frac{_{\vdash}\neg S^{\bar v}(\Phi,\bar t),\Sigma}{_{\vdash}S^{\bar v}(\neg\Phi,\bar t),\Sigma}; \qquad _{\dashv}\mathrm{S}\neg\ \frac{_{\dashv}\neg S^{\bar v}(\Phi,\bar t),\Sigma}{_{\dashv}S^{\bar v}(\neg\Phi,\bar t),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\mathrm{S}\neg\ \frac{_{\vdash}S^{\bar v}(\Phi,\bar t),\Sigma}{_{\vdash}\neg S^{\bar v}(\neg\Phi,\bar t),\Sigma}; \qquad _{\dashv}\neg\mathrm{S}\neg\ \frac{_{\dashv}S^{\bar v}(\Phi,\bar t),\Sigma}{_{\dashv}\neg S^{\bar v}(\neg\Phi,\bar t),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\mathrm{S}\vee\ \frac{_{\vdash}S^{\bar v}(\Phi,\bar t)\vee S^{\bar v}(\Psi,\bar t),\Sigma}{_{\vdash}S^{\bar v}(\Phi\vee\Psi,\bar t),\Sigma}; \qquad _{\dashv}\mathrm{S}\vee\ \frac{_{\dashv}S^{\bar v}(\Phi,\bar t)\vee S^{\bar v}(\Psi,\bar t),\Sigma}{_{\dashv}S^{\bar v}(\Phi\vee\Psi,\bar t),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\mathrm{S}\vee\ \frac{_{\vdash}\neg(S^{\bar v}(\Phi,\bar t)\vee S^{\bar v}(\Psi,\bar t)),\Sigma}{_{\vdash}\neg S^{\bar v}(\Phi\vee\Psi,\bar t),\Sigma}; \qquad _{\dashv}\neg\mathrm{S}\vee\ \frac{_{\dashv}\neg(S^{\bar v}(\Phi,\bar t)\vee S^{\bar v}(\Psi,\bar t)),\Sigma}{_{\dashv}\neg S^{\bar v}(\Phi\vee\Psi,\bar t),\Sigma}.$$

Нехай Ψ отримана з елементарної формули Φ на основі еквівалентних перетворень згідно з теоремою 4 роботи [4]. Маємо такі форми нормалізації термів:

$$_{\vdash}\mathrm{NrTr}\ \frac{_{\vdash}\Psi,\Sigma}{_{\vdash}\Phi,\Sigma}; \qquad _{\dashv}\mathrm{NrTr}\ \frac{_{\dashv}\Psi,\Sigma}{_{\dashv}\Phi,\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\mathrm{NrTr}\ \frac{_{\vdash}\neg\Psi,\Sigma}{_{\vdash}\neg\Phi,\Sigma}; \qquad _{\dashv}\neg\mathrm{NrTr}\ \frac{_{\dashv}\neg\Psi,\Sigma}{_{\dashv}\neg\Phi,\Sigma}.$$

Допоміжні форми спрощення, базовані на властивостях CIΦ, CNΦ, CUΦ:

$$_{\vdash}\mathrm{CI\Phi}\ \frac{_{\vdash}\Phi,\Sigma}{_{\vdash}S(\Phi),\Sigma}; \qquad _{\dashv}\mathrm{CI\Phi}\ \frac{_{\dashv}\Phi,\Sigma}{_{\dashv}S(\Phi),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\mathrm{CI\Phi}\ \frac{_{\vdash}\neg\Phi,\Sigma}{_{\vdash}\neg S(\Phi),\Sigma}; \qquad _{\dashv}\neg\mathrm{CI\Phi}\ \frac{_{\dashv}\neg\Phi,\Sigma}{_{\dashv}\neg S(\Phi),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\mathrm{CN\Phi}\ \frac{_{\vdash}S^{\bar v}(\Phi,\bar t),\Sigma}{_{\vdash}S^{x,\bar v}(\Phi,'x,\bar t),\Sigma}; \qquad _{\dashv}\mathrm{CN\Phi}\ \frac{_{\dashv}S^{\bar v}(\Phi,\bar t),\Sigma}{_{\dashv}S^{x,\bar v}(\Phi,'x,\bar t),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\mathrm{CN\Phi}\ \frac{_{\vdash}\neg S^{\bar v}(\Phi,\bar t),\Sigma}{_{\vdash}\neg S^{x,\bar v}(\Phi,'x,\bar t),\Sigma}; \qquad _{\dashv}\neg\mathrm{CN\Phi}\ \frac{_{\dashv}\neg S^{\bar v}(\Phi,\bar t),\Sigma}{_{\dashv}\neg S^{x,\bar v}(\Phi,'x,\bar t),\Sigma};$$

$$_{\vdash}\mathrm{CU\Phi}\ \frac{_{\vdash}S^{\bar v}(\Phi,\bar t),\Sigma}{_{\vdash}S^{x,\bar v}(\Phi,t,\bar t),\Sigma},\ x\in\nu(\Phi); \qquad _{\dashv}\mathrm{CU\Phi}\ \frac{_{\dashv}S^{\bar v}(\Phi,\bar t),\Sigma}{_{\dashv}S^{x,\bar v}(\Phi,t,\bar t),\Sigma},\ x\in\nu(\Phi);$$

$$_{\vdash}\neg\mathrm{CU\Phi}\ \frac{_{\vdash}\neg S^{\bar v}(\Phi,\bar t),\Sigma}{_{\vdash}\neg S^{x,\bar v}(\Phi,t,\bar t),\Sigma},\ x\in\nu(\Phi); \qquad _{\dashv}\neg\mathrm{CU\Phi}\ \frac{_{\dashv}\neg S^{\bar v}(\Phi,\bar t),\Sigma}{_{\dashv}\neg S^{x,\bar v}(\Phi,t,\bar t),\Sigma},\ x\in\nu(\Phi).$$

Форми декомпозиції формул:

$$_{\vdash}\neg\neg\ \frac{_{\vdash}\Phi,\ \Sigma}{_{\vdash}\neg\neg\Phi,\ \Sigma}; \qquad _{\dashv}\neg\neg\ \frac{_{\dashv}\Phi,\ \Sigma}{_{\dashv}\neg\neg\Phi,\ \Sigma};$$

$$_{\vdash}\vee\ \frac{_{\vdash}\Phi,\ \Sigma \qquad _{\vdash}\Psi,\ \Sigma}{_{\vdash}\Phi\vee\Psi,\ \Sigma}; \qquad _{\dashv}\vee\ \frac{_{\dashv}\Phi,\ _{\dashv}\Psi,\ \Sigma}{_{\dashv}\Phi\vee\Psi,\ \Sigma};$$

$$_{\vdash}\neg\vee\ \frac{_{\vdash}\neg\Phi,\ _{\vdash}\neg\Psi,\ \Sigma}{_{\vdash}\neg(\Phi\vee\Psi),\ \Sigma}; \qquad _{\dashv}\neg\vee\ \frac{_{\dashv}\neg\Phi,\ \Sigma \qquad _{\dashv}\neg\Psi,\ \Sigma}{_{\dashv}\neg(\Phi\vee\Psi),\ \Sigma}.$$

Базові секвенційні форми числення *FC*: $_{\vdash}$NrTr, $_{\dashv}$NrTr, $_{\vdash}$CNΦ, $_{\dashv}$CNΦ, $_{\vdash}$CUΦ, $_{\dashv}$CUΦ, $_{\vdash}$CIΦ, $_{\dashv}$CIΦ, $_{\vdash}$SSΦ, $_{\dashv}$SSΦ, $_{\vdash}$S¬, $_{\dashv}$S¬, $_{\vdash}$S∨, $_{\dashv}$S∨, $_{\vdash}$∨, $_{\dashv}$∨; до них додаємо:

$$\vdash\neg\ \frac{\dashv\Phi,\ \Sigma}{\vdash\neg\Phi,\ \Sigma};\qquad\qquad \dashv\neg\ \frac{\vdash\Phi,\ \Sigma}{\dashv\neg\Phi,\ \Sigma}.$$

На ***рівні БКФЛРС*** маємо наступні секвенційні числення.

Числення $F_E LR$ формалізує $\models_{TF}$. Умова замкненості секвенції: $\mathrm{C}\vee\mathrm{CLR}\vee\mathrm{CRf_S}$.

Числення $F_E L$ формалізує $\models_{T}$. Умова замкненості секвенції: $\mathrm{C}\vee\mathrm{CL}\vee\mathrm{CRf_S}$.

Числення $F_E R$ формалізує $\models_{F}$. Умова замкненості секвенції: $\mathrm{C}\vee\mathrm{CR}\vee\mathrm{CRf_S}$.

Числення $F_E C$ формалізує $\models_{IR}$. Умова замкненості секвенції: $\mathrm{C}\vee\mathrm{CRf_S}$.

Тут додаткова умова замкненості $\mathrm{CRf_S}$ індукована властивістю C_{RfS}:

$\mathrm{CRf_S}$) секвенція $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ замкнена, якщо $t\equiv t\in\Delta$ для деякого $t\in Tr$.

Базові секвенційні форми числень $F_E LR$, $F_E L$, $F_E R$ – це наведені вище форми числень *FLR*, *FLR*, *FR*, до яких додаємо форми, пов'язані зі строгою рівністю. При цьому для форм нормалізації термів $\vdash$NrTr, $\dashv$NrTr, $\vdash\neg$NrTr, $\dashv\neg$NrTr відмінність полягає в іншому способі отримання виділених формул: Ψ отримується з Φ спрощенням та нормалізацією термів на основі STS, CNTS, CUTS, SITS, SDTS, SFTS.

Форми, пов'язані зі зняттям заперечення для формул вигляду $\neg\, t\equiv s$:

$$\vdash\mathrm{ES}\ \frac{\dashv t\equiv s,\ \Sigma}{\vdash\neg t\equiv s,\ \Sigma};\qquad\qquad \dashv\mathrm{ES}\ \frac{\vdash t\equiv s,\ \Sigma}{\dashv\neg t\equiv s,\ \Sigma}.$$

Форми, пов'язані з симетричністю й транзитивністю строгої рівності:

$$\mathrm{SmS}\ \frac{\vdash t\equiv s,\ \vdash s\equiv t,\ \Sigma}{\vdash t\equiv s,\ \Sigma};\qquad\qquad \mathrm{TrS}\ \frac{\vdash t\equiv s,\ \vdash s\equiv r,\ \vdash t\equiv r,\ \Sigma}{\vdash t\equiv s,\ \vdash s\equiv r,\ \Sigma}.$$

Форми, пов'язані з заміною рівних ($\vdash\neg$ETS і $\dashv\neg$ETS тут зайві через $\vdash$ES і $\dashv$ES):

$$\vdash\mathrm{ETS}\ \frac{\vdash t\equiv s,\vdash S^{\overline{v},z}(\theta,\overline{r},t)\equiv\tau,\vdash S^{\overline{v},z}(\theta,\overline{r},s)\equiv\tau,\ \Sigma}{\vdash t\equiv s,\vdash S^{\overline{v},z}(\theta,\overline{r},t)\equiv\tau,\ \Sigma};$$

$$\dashv\mathrm{ETS}\ \frac{\vdash t\equiv s,\dashv S^{\overline{v},z}(\theta,\overline{r},t)\equiv\tau,\dashv S^{\overline{v},z}(\theta,\overline{r},s)\equiv\tau,\ \Sigma}{\vdash t\equiv s,\dashv S^{\overline{v},z}(\theta,\overline{r},t)\equiv\tau,\ \Sigma};$$

$$\vdash\mathrm{E\Phi S}\ \frac{\vdash t\equiv s,\vdash S^{\overline{v},z}(\Phi,\overline{r},t),\vdash S^{\overline{v},z}(\Phi,\overline{r},s),\Sigma}{\vdash t\equiv s,\vdash S^{\overline{v},z}(\Phi,\overline{r},t),\Sigma};$$

$$\dashv\mathrm{E\Phi S}\ \frac{\vdash t\equiv s,\dashv S^{\overline{v},z}(\Phi,\overline{r},t),\dashv S^{\overline{v},z}(\Phi,\overline{r},s),\Sigma}{\vdash t\equiv s,\dashv S^{\overline{v},z}(\Phi,\overline{r},t),\Sigma};$$

$$\vdash\neg\mathrm{E\Phi S}\ \frac{\vdash t\equiv s,\vdash\neg S^{\overline{v},z}(\Phi,\overline{r},t),\vdash\neg S^{\overline{v},z}(\Phi,\overline{r},s),\Sigma}{\vdash t\equiv s,\vdash\neg S^{\overline{v},z}(\Phi,\overline{r},t),\Sigma};$$

$$\dashv\neg\mathrm{E\Phi S}\ \frac{\vdash t\equiv s,\dashv\neg S^{\overline{v},z}(\Phi,\overline{r},t),\dashv\neg S^{\overline{v},z}(\Phi,\overline{r},s),\Sigma}{\vdash t\equiv s,\dashv\neg S^{\overline{v},z}(\Phi,\overline{r},t),\Sigma}.$$

Секвенційні форми пронесення суперпозиції через рівність:

$$\vdash\mathrm{SES}\ \frac{\vdash S^{\overline{v}}(t,\overline{t})\equiv S^{\overline{v}}(s,\overline{t}),\Sigma}{\vdash S^{\overline{v}}(t\equiv s,\overline{t}),\Sigma};\qquad\qquad \dashv\mathrm{SES}\ \frac{\dashv S^{\overline{v}}(t,\overline{t})\equiv S^{\overline{v}}(s,\overline{t}),\Sigma}{\dashv S^{\overline{v}}(t\equiv s,\overline{t}),\Sigma};$$

$$\vdash\neg\mathrm{SES}\ \frac{\vdash\neg S^{\overline{v}}(t,\overline{t})\equiv S^{\overline{v}}(s,\overline{t}),\Sigma}{\vdash\neg S^{\overline{v}}(t\equiv s,\overline{t}),\Sigma};\qquad\qquad \dashv\neg\mathrm{SES}\ \frac{\dashv\neg S^{\overline{v}}(t,\overline{t})\equiv S^{\overline{v}}(s,\overline{t}),\Sigma}{\dashv\neg S^{\overline{v}}(t\equiv s,\overline{t}),\Sigma}.$$

Базовими секвенційними формами числення F_EC є форми числення FC, до них додаємо форми SmS, TrS, $_{\vdash}$ETS, $_{\dashv}$ETS, $_{\vdash}$EФS, $_{\dashv}$EФS, $_{\vdash}$SES, $_{\dashv}$SES, пов'язані зі строгою рівністю. Тут $_{\vdash}$ES та $_{\dashv}$ES не потрібні через наявність $_{\vdash}\neg$ та $_{\dashv}\neg$.

На ***рівні БКФЛР*** маємо числення FC_E, яке формалізує відношення $|=_{IR}$.

Додаткова умова замкненості секвенції індукована властивістю C_{RfW}:

CRf$_W$) секвенція $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ замкнена, якщо $t = t \in \Delta$ для деякого $t \in Tr$.

Звідси маємо умову замкненості секвенції: $\mathrm{C} \vee \mathrm{CRf_W}$.

Базовими секвенційними формами числення FC_E є форми числення FC, до яких додаємо форми, пов'язані зі слабкою рівністю. При цьому для форм нормалізації термів $_{\vdash}$NrTr та $_{\dashv}$NrTr відмінність полягає в іншому способі отримання виділених формул: Ψ отримується з Φ спрощенням та нормалізацією термів на основі ST, CNT, CUT, SIT, SDT, SFT (для числення FC – згідно з теоремою 4 із [4]).

Можна ввести окремі форми кроку спрощення чи нормалізації терма згідно з ST, CNT, CUT, SIT, SDT, SFT. Тоді форми $_{\vdash}$NrTr та $_{\dashv}$NrTr трактуємо як похідні.

Форми, пов'язані з симетричністю й транзитивністю слабкої рівності:

$$\mathrm{SmW}\ \frac{_{\vdash}t = s,\ _{\vdash}s = t,\ \Sigma}{_{\vdash}t = s,\ \Sigma}; \qquad \mathrm{TrW}\ \frac{_{\vdash}t = s,\ _{\vdash}s = r,\ _{\vdash}t = r,\ \Sigma}{_{\vdash}t = s,\ _{\vdash}s = r,\ \Sigma}.$$

Форми, пов'язані з заміною рівних і пронесенням суперпозиції через рівність:

$$_{\vdash}\mathrm{ETW}\ \frac{_{\vdash}t = s,\ _{\vdash}S^{\bar{v},z}(\theta,\bar{r},t) = \tau,\ _{\vdash}S^{\bar{v},z}(\theta,\bar{r},s) = \tau,\ \Sigma}{_{\vdash}t = s,\ _{\vdash}S^{\bar{v},z}(\theta,\bar{r},t) = \tau,\ \Sigma};$$

$$_{\dashv}\mathrm{ETW}\ \frac{_{\vdash}t = s,\ _{\dashv}S^{\bar{v},z}(\theta,\bar{r},t) = \tau,\ _{\dashv}S^{\bar{v},z}(\theta,\bar{r},s) = \tau,\ \Sigma}{_{\vdash}t = s,\ _{\dashv}S^{\bar{v},z}(\theta,\bar{r},t) = \tau,\ \Sigma};$$

$$_{\vdash}\mathrm{E\Phi W}\ \frac{_{\vdash}t = s,\ _{\vdash}S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},t),\ _{\vdash}S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},s),\Sigma}{_{\vdash}t = s,\ _{\vdash}S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},t),\Sigma};$$

$$_{\dashv}\mathrm{E\Phi W}\ \frac{_{\vdash}t = s,\ _{\dashv}S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},t),\ _{\dashv}S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},s),\Sigma}{_{\vdash}t = s,\ _{\dashv}S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},t),\Sigma}.$$

Секвенційні форми пронесення суперпозиції через рівність:

$$_{\vdash}\mathrm{SE}\ \frac{_{\vdash}S^{\bar{v}}(t,\bar{t}) = S^{\bar{v}}(s,\bar{t}),\Sigma}{_{\vdash}S^{\bar{v}}(t = s,\bar{t}),\Sigma}; \qquad _{\dashv}\mathrm{SE}\ \frac{_{\dashv}S^{\bar{v}}(t,\bar{t}) = S^{\bar{v}}(s,\bar{t}),\Sigma}{_{\dashv}S^{\bar{v}}(t = s,\bar{t}),\Sigma}.$$

Властивості відношень логічного наслідку для множин формул індукують основну властивість секвенційних форм (тут |= – одне з $|=_{IR}$, $|=_T$, $|=_F$, $|=_{TF}$):

Теорема 1. 1. Нехай $\dfrac{_{\vdash}\Lambda_{\dashv}\mathrm{K}}{_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta}$ – базова секвенційна форма. Тоді:

a) $\Lambda \models \mathrm{K} \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta$; b) $\Gamma \not\models \Delta \Leftrightarrow \Lambda \not\models \mathrm{K}$.

2. Нехай $\dfrac{_{\vdash}\Lambda_{\dashv}\mathrm{K} \quad _{\vdash}\mathrm{X}_{\dashv}\mathrm{Z}}{_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta}$ – базова секвенційна форма. Тоді:

a) $\Lambda \models \mathrm{K}$ та $\mathrm{X} \models \mathrm{Z} \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta$; b) $\Gamma \not\models \Delta \Leftrightarrow \Lambda \not\models \mathrm{K}$ або $\mathrm{X} \not\models \mathrm{Z}$.

Побудова виведення в секвенційних численнях. Теорема коректності

Опишемо побудову виведення – секвенційного дерева – для заданої секвенції Σ (скінченної або зліченної). Така побудова розбита на етапи. Вона починається з кореня дерева. При цьому кожне застосування секвенційної форми проводиться

лише до скінченної множини доступних на даний момент формул.

На початку етапу виконується *крок доступу*: до списку доступних додається по одній формулі зі списків ${}_{\vdash}$-формул та ${}_{\dashv}$-формул. Якщо відповідний список вичерпано, то на подальших кроках доступу додаємо по одній формулі з невичерпаного списку. На початку побудови доступна лише пара перших формул списків.

Після виконання кожної форми перевіряємо, чи будуть усі листи будованого дерева замкненими секвенціями. При появі замкненої секвенції, до неї вже незастосовна жодна форма, і процес побудови дерева на цьому шляху обривається.

Якщо всі листи побудованого дерева замкнені, то ми отримали замкнене секвенційне дерево: процедура завершена позитивно.

Якщо ні, то для кожного незамкненого листа робимо наступний крок доступу. Нехай після додавання до секвенції-листа нових доступних формул отримана секвенція η. Активізуємо всі доступні непримітивні секвенції η. До кожної активної формули застосовуємо відповідну секвенційну форму. Після застосування основної форми утворені нею формули на даному етапі пасивні, до таких формул на цьому етапі основні форми не застосовуються.

У процесі застосування основних форм (форми типу S¬, S∨, SSΦ, ¬¬, ∨, ¬∨, а також типу SE для БКФЛР, типу SES та ES для БКФЛРС) за необхідності виконуємо спрощення. Для цього кожен раз при появі відповідної ситуації застосовуємо належну допоміжну форму типів CNΦ, CUΦ, CIΦ. Кожен раз при отриманні елементарної формули для неї виконуємо форму нормалізації термів (форми типу NrTr) до тих пір, поки усі її терми не набудуть нормальної форми.

Застосування форм рівності (числення БКФЛР та БКФЛРС) має особливості.

Форми SmS (SmW для числення FC_E) виконуються кожен раз при появі (активізації) *нової* для секвенції формули вигляду ${}_{\vdash}t \equiv s$ (вигляду ${}_{\vdash}t = s$).

Форми TrS (TrW для FC_E) виконуємо кожен раз при активізації пари формул ${}_{\vdash}t \equiv s$ та ${}_{\vdash}s \equiv r$ (${}_{\vdash}t = s$ та ${}_{\vdash}s = r$ для FC_E), якщо хоч одна з них *нова* для секвенції.

Форми типу ETS (типу ETW для FC_E) виконуються кожен раз при активізації пари формул, одна з яких має вигляд ${}_{\vdash}t \equiv s$ (вигляд ${}_{\vdash}t = s$), а друга – ${}_{\vdash}S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, t) \equiv \tau$ чи ${}_{\dashv}S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, t) \equiv \tau$ (вигляд ${}_{\vdash}S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, t) = \tau$ чи ${}_{\dashv}S^{\bar{v},z}(\theta, \bar{r}, t) = \tau$), причому принаймі одна з них нова для секвенції.

Форми типу EΦS (типу EΦW для FC_E) виконуються кожен раз при активізації пари формул, одна з яких має вигляд ${}_{\vdash}t \equiv s$ (вигляд ${}_{\vdash}t = s$), а друга – ${}_{\vdash}S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t)$, ${}_{\dashv}S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t)$, ${}_{\vdash}\neg S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t)$ чи ${}_{\dashv}\neg S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t)$ (вигляд ${}_{\vdash}S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t)$ чи ${}_{\dashv}S^{\bar{v},z}(\Phi, \bar{r}, t)$), причому принаймі одна з них нова для секвенції.

Після застосування основної форми формула дезактивується. Секвенції – це *множини* специфікованих формул, тому повторів формул у секвенціях немає.

При побудові секвенційного дерева можливі такі випадки:

1) процедуру завершено позитивно, отримано скінченне замкнене дерево;

2) процедуру завершено негативно, отримано скінченне незамкнене дерево (це можливо для випадку скінченних секвенцій);

3) процедура не завершується, маємо нескінченне секвенційне дерево (це можливо для випадку нескінченних секвенцій).

У випадках 2) і 3) у дереві існує скінченний або нескінченний шлях, вершини якого не можуть бути замкненими секвенціями. Такий шлях $\wp$ назвемо незамкненим. Кожна з формул секвенції Σ зустрінеться на $\wp$ і стане доступною.

Для пропонованих числень і відповідних відношень логічного наслідку маємо:

Теорема 2 (коректності). Нехай секвенція $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ вивідна. Тоді $\Gamma \models \Delta$.

Якщо $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ вивідна, то для неї побудоване замкнене секвенційне дерево.

Із побудови дерева випливає: $\Lambda \models \mathrm{K}$ для кожної вершини $_{|-}\Lambda_{-|}\mathrm{K}$. Для листів дерева це випливає з визначення замкненої секвенцій. Збереження секвенційними формами відношення логічного наслідку (від заснування до висновку) випливає з теореми 1. Таким чином, для кореня дерева – секвенції $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ – теж маємо $\Gamma \models \Delta$.

Теореми про контрмоделі. Повнота секвенційних числень

Теореми про повноту опираються на відповідні теореми про існування контрмоделей для множини формул незамкненого шляху.

Теорема 3 (про контрмоделі для числення *FLR*). Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, збудованому для секвенції $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$, нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху.

Тоді існують інтерпретації $A = (A, I_1)$, $B = (A, I_2)$ та $\delta, \eta \in {}^{V}A$ такі:

H_T) $_{|-}\Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$ та $_{-|}\Phi \in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) \neq T$;

H_F) $_{|-}\Phi \in H \Rightarrow \Phi_B(\eta) \neq F$ та $_{-|}\Phi \in H \Rightarrow \Phi_B(\eta) = F$.

Пари (A, δ) та (B, η) назвемо *T-контрмоделлю* та *F-контрмоделлю* для $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$.

Доведення. Застосування форм до секвенцій на шляху $\wp$ відбувається до тих пір, поки це можливо, тому кожна непримітивна формула чи її заперечення, що зустрічається на шляху $\wp$, рано чи пізно буде розкладена чи спрощена.

Усі секвенції шляху $\wp$ незамкнені, тому для них не виконується умова замкненості $\mathrm{C} \vee \mathrm{CLR}$. Отже, для множини H виконуються умови коректності:

HC) не існує формули Φ такої, що $_{|-}\Phi \in H$ та $_{-|}\Phi \in H$.

HCLR) не існує формул Φ та Ψ таких: $_{|-}\Phi \in H$, $_{|-}\neg\Phi \in H$, $_{-|}\Psi \in H$, $_{-|}\neg\Psi \in H$;

Зауваження: HCLR $\Leftrightarrow$ HCL $\vee$ HCR, де HCL і HCR отримано з умов CL і CR:

HCL) не існує формули Φ такої, що $_{|-}\Phi \in H$ та $_{|-}\neg\Phi \in H$;

HCR) не існує формули Ψ такої, що $_{-|}\Psi \in H$ та $_{-|}\neg\Psi \in H$.

Переходи від нижчої вершини шляху $\wp$ до вищої відбуваються згідно з відповідною секвенційною формою, тому для H виконуються умови переходу.

HCI) $_{|-}S(\Phi) \in H \;\Rightarrow\; _{|-}\Phi \in H$; $_{-|}S(\Phi) \in H \;\Rightarrow\; _{-|}\Phi \in H$;

H¬CI) $_{|-}\neg S(\Phi) \in H \;\Rightarrow\; _{|-}\neg\Phi \in H$; $_{-|}\neg S(\Phi) \in H \;\Rightarrow\; _{-|}\neg\Phi \in H$;

HCN) $_{|-}S^{\bar{x},\bar{v}}(\Phi,'\bar{x},\bar{t}) \in H \;\Rightarrow\; _{|-}S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}) \in H$; $_{-|}S^{\bar{x},\bar{v}}(\Phi,'\bar{x},\bar{t}) \in H \;\Rightarrow\; _{-|}S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}) \in H$;

H¬CN) $_{|-}\neg S^{\bar{x},\bar{v}}(\Phi,'\bar{x},\bar{t}) \in H \;\Rightarrow\; _{|-}\neg S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}) \in H$;

$_{-|}\neg S^{\bar{x},\bar{v}}(\Phi,'\bar{x},\bar{t}) \in H \;\Rightarrow\; _{-|}\neg S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}) \in H$.

HCU) за умови $x \in \nu(\Phi)$ маємо: $_{|-}S^{x,\bar{v}}(\Phi,t,\bar{t}) \in H \;\Rightarrow\; _{|-}S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}) \in H$;

$_{-|}S^{x,\bar{v}}(\Phi,t,\bar{t}) \in H \;\Rightarrow\; _{-|}S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}) \in H$.

H¬CU) за умови $x \in \nu(\Phi)$ маємо: $_{|-}\neg S^{x,\bar{v}}(\Phi,t,\bar{t}) \in H \;\Rightarrow\; _{|-}\neg S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}) \in H$;

$_{-|}\neg S^{x,\bar{v}}(\Phi,t,\bar{t}) \in H \;\Rightarrow\; _{-|}\neg S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}) \in H$.

Нехай Ψ отримана з елементарної Φ згідно з перетвореннями теореми 4. Тоді:
HNr) $_{|-}\Phi \in H \;\Rightarrow\; _{|-}\Psi \in H$; $_{-|}\Phi \in H \;\Rightarrow\; _{-|}\Psi \in H$;
H¬Nr) $_{|-}\neg\Phi \in H \;\Rightarrow\; _{|-}\neg\Psi \in H$; $_{-|}\neg\Phi \in H \;\Rightarrow\; _{-|}\neg\Psi \in H$.

Нехай Ψ отримана з Φ згорткою суперпозицій згідно з SSΦ. Тоді:
HSΦ) $_{|-}\Phi \in H \;\Rightarrow\; _{|-}\Psi \in H$; $_{-|}\Phi \in H \;\Rightarrow\; _{-|}\Psi \in H$;
H¬SΦ) $_{|-}\neg\Phi \in H \;\Rightarrow\; _{|-}\neg\Psi \in H$; $_{-|}\neg\Phi \in H \;\Rightarrow\; _{-|}\neg\Psi \in H$.

Умови, пов'язані з пронесенням суперпозицій та декомпозицією формул:
HS¬) $_{|-}S^{\bar{v}}(\neg\Phi,\bar{t}) \in H \;\Rightarrow\; _{|-}\neg S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}) \in H$; $_{-|}S^{\bar{v}}(\neg\Phi,\bar{t}) \in H \;\Rightarrow\; _{-|}\neg S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}) \in H$;
H¬S¬) $_{|-}\neg S^{\bar{v}}(\neg\Phi,\bar{t}) \in H \;\Rightarrow\; _{|-}\neg\neg S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}) \in H$;
$_{-|}\neg S^{\bar{v}}(\neg\Phi,\bar{t}) \in H \;\Rightarrow\; _{-|}\neg\neg S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}) \in H$;
HS∨) $_{|-}S^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi,\bar{t}) \in H \;\Rightarrow\; _{|-}S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}) \vee S^{\bar{v}}(\Psi,\bar{t}) \in H$;
$_{-|}S^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi,\bar{t}) \in H \;\Rightarrow\; _{-|}S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}) \vee S^{\bar{v}}(\Psi,\bar{t}) \in H$;
H¬S∨) $_{|-}\neg S^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi,\bar{t}) \in H \;\Rightarrow\; _{|-}\neg(S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}) \vee S^{\bar{v}}(\Psi,\bar{t})) \in H$;
$_{-|}\neg S^{\bar{v}}(\Phi\vee\Psi,\bar{t}) \in H \;\Rightarrow\; _{-|}\neg(S^{\bar{v}}(\Phi,\bar{t}) \vee S^{\bar{v}}(\Psi,\bar{t})) \in H$;
H¬¬) $_{|-}\neg\neg\Phi\in H \Rightarrow {}_{|-}\Phi\in H$; $_{-|}\neg\neg\Phi\in H \Rightarrow {}_{-|}\Phi\in H$;
H∨) $_{|-}\Phi\vee\Psi\in H \Rightarrow {}_{|-}\Phi\in H$ або $_{|-}\Psi\in H$; $_{-|}\Phi\vee\Psi\in H \Rightarrow {}_{-|}\Phi\in H$ та $_{-|}\Psi\in H$;
H¬∨) $_{|-}\neg(\Phi\vee\Psi)\in H \Rightarrow {}_{|-}\neg\Phi\in H$ та $_{|-}\neg\Psi\in H$; $_{-|}\neg(\Phi\vee\Psi)\in H \Rightarrow {}_{-|}\neg\Phi\in H$ або $_{-|}\neg\Psi\in H$.

Таку множину *H* назвемо *LR*-модельною. Побудуємо контрмоделі за *H*.

Нехай $W = \{v_0, \ldots, v_n, \ldots\}$ – множина усіх предметних імен, що фігурують у ДНС та символах суперпозиції формул *H*, нехай $Dn = \{'v \mid v\in W\}$. Нехай *Tr* – множина усіх нормальних термів, що фігурують у формулах *H*. Задамо множину $TW = Tr\cup Dn$, нехай $TW = \{t_0, t_1, ..., t_n, \ldots\}$, причому кожне $'v_j$ – це t_{kj}. Візьмемо множину *A* таку, що існує бієкція між *TW* та *A*. Кожному $t_i\in TW$ відповідає $a_i\in A$, причому кожному $'v_j$ відповідає a_{kj}. Задамо $\delta = \eta = [v_0 \mapsto a_{k0}, \ldots, v_j \mapsto a_{kj}, \ldots]$. Для всіх $f\in Fns$, наявних в *H*, задамо f_A та f_B так, щоб виконувалась умова: $(t_i)_A(\delta) = (t_i)_B(\eta) = a_i$ для всіх $t_i\in Tr$.

Для $t_{kj} = {}'v_j$ маємо $(t_{kj})_A(\delta) = ('v_j)_A(\delta) = a_{kj}$ та $(t_{kj})_B(\eta) = ('v_j)_B(\eta) = a_{kj}$.

Нехай $t_m = f\in Fns$. Задаємо $f_A(\delta) = (t_m)_A(\delta) = a_m$ та $f_B(\eta) = (t_m)_B(\eta) = a_m$.

Для всіх інших $t_m\in TW$ значення задаємо індукцією за побудовою терма.

Нехай t_p – це $S^{v_{i1},\ldots,v_{in}} f\, t_{j1}\ldots t_{jn}$, де $f = t_m\in Fns$. Тоді маємо $f_A(\delta) = (t_m)_A(\delta) = a_m$, $f_B(\eta) = (t_m)_B(\eta) = a_m$, $(t_{j1})_A(\delta) = (t_{j1})_B(\eta) = a_{j1}, \ldots, (t_{jn})_A(\delta) = (t_{jn})_B(\eta) = a_{jn}$. Тому задамо

$$f_A(\delta\nabla v_{i1} \mapsto a_{j1},\ldots,v_{in} \mapsto a_{jn}) = f_B(\eta\nabla v_{i1} \mapsto a_{j1},\ldots,v_{in} \mapsto a_{jn}) = a_p .$$

Задамо тепер значення примітивних формул та їх заперечень на δ і η:

– $_{|-}p\in H \Rightarrow p_A(\delta) = T$ та $p_B(\eta) \neq F$;
– $_{-|}p\in H \Rightarrow p_A(\delta) \neq T$ та $p_B(\eta) = F$;
– $_{|-}\neg p\in H \Rightarrow p_A(\delta) = F$ та $p_B(\eta) \neq T$, що дає $\neg p_A(\delta) = T$ та $\neg p_B(\eta) \neq F$;
– $_{-|}\neg p\in H \Rightarrow p_A(\delta) \neq F$ та $p_B(\eta) = T$, що дає $\neg p_A(\delta) \neq T$ та $\neg p_B(\eta) = F$;
– $_{|-}S^{v_1,\ldots,v_n} p t_{j1}\ldots t_{jn} \in H \;\Rightarrow$
$\Rightarrow p_A(\delta\nabla v_1 \mapsto a_{j1}\nabla\ldots v_n \mapsto a_{jn}) = T$ та $p_B(\eta\nabla v_1 \mapsto a_{j1}\nabla\ldots v_n \mapsto a_{jn}) \neq F$;
– $_{-|}S^{v_1,\ldots,v_n} p t_{j1}\ldots t_{jn} \in H \;\Rightarrow$

$\Rightarrow p_A(\delta\nabla v_1 \mapsto a_{j1}\nabla...v_n \mapsto a_{jn}) \neq T$ та $p_B(\eta\nabla v_1 \mapsto a_{j1}\nabla...v_n \mapsto a_{jn}) = F$;

– $\vdash\neg S^{v_1,...,v_n} pt_{j1}...t_{jn} \in H \Rightarrow$

$\Rightarrow p_A(\delta\nabla v_1 \mapsto a_{j1}\nabla...v_n \mapsto a_{jn}) = F$ та $p_B(\eta\nabla v_1 \mapsto a_{j1}\nabla...v_n \mapsto a_{jn}) \neq T$;

– $\dashv S^{v_1,...,v_n} pt_{j1}...t_{jn} \in H \Rightarrow$

$\Rightarrow p_A(\delta\nabla v_1 \mapsto a_{j1}\nabla...v_n \mapsto a_{jn}) \neq F$ та $p_B(\eta\nabla v_1 \mapsto a_{j1}\nabla...v_n \mapsto a_{jn}) = T$.

Далі доводимо традиційно: індукцією за складністю формули згідно з пунктами визначення H.

Зауваження щодо вибору контрмоделі.

Для F-контрмоделі η невиконання HCR, тобто наявність формули Φ такої, що $\dashv\Phi\in H$ та $\dashv\neg\Phi\in H$, дає $\Phi_B(\eta) = F$ та $\neg\Phi_B(\eta) = F$, що дає неоднозначність Φ_B.

Для T-контрмоделі δ невиконання HCL, тобто наявність формули Φ такої, що $\vdash\Phi\in H$ та $\vdash\neg\Phi\in H$, дає $\Phi_A(\delta) = T$ та $\neg\Phi_A(\delta) = T$, що дає неоднозначність Φ_A.

Отже, якщо для H маємо HCL та невірне HCR, то беремо T-контрмодель δ; якщо для H маємо HCR та невірне HCL, то беремо F-контрмодель η; якщо для H вірні HCL та HCR, то можна брати як T-контрмодель δ, так і F-контрмодель η.

Подібним чином формулюються і доводяться теореми про контрмоделі для числень *FL* та *FR*. Для *FL* отримуємо T-контрмодель, а для *FR* – F-контрмодель.

Для числення *FC* теорема про контрмоделі формулюється так.

Теорема 4. Нехай ℘ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, збудованому для секвенції $\vdash\Gamma\dashv\Delta$, нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Тоді існують інтерпретація $A = (A, I)$ та $\delta\in{}^VA$ такі:

H_C) $\vdash\Phi\in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$ та $\dashv\Phi\in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = F$.

Таку пару (A, δ) назвемо *IR*-контрмоделлю для секвенції $\vdash\Gamma\dashv\Delta$.

Доведення. Переходи від нижчої вершини шляху ℘ до вищої відбуваються згідно з відповідною секвенційною формою числення *FC*, тому для H виконуються умови переходу HCI, HCN, HCU, HNr, HSΦ, HS¬, HS∨, H∨, а також H¬:

H¬) $\vdash\neg\Phi\in H \Rightarrow \dashv\Phi\in H$; $\dashv\neg\Phi\in H \Rightarrow \vdash\Phi\in H$.

Усі секвенції шляху ℘ незамкнені, тому для H вірна умова коректності:

HC) не існує формули Φ такої, що $\vdash\Phi\in H$ та $\dashv\Phi\in H$;

Таку множину H назвемо C-модельною. Побудову контрмоделі за H ведемо так, як в теоремі 3, лише дещо інакше задаємо значення примітивних формул на δ:

– $\vdash p\in H \Rightarrow p_A(\delta) = T$;

– $\dashv p\in H \Rightarrow p_A(\delta) = F$;

– $\vdash S^{v_1,...,v_n} pt_{j1}...t_{jn} \in H \Rightarrow p_A(\delta\nabla v_1 \mapsto a_{j1}\nabla...v_n \mapsto a_{jn}) = T$;

– $\dashv S^{v_1,...,v_n} pt_{j1}...t_{jn} \in H \Rightarrow p_A(\delta\nabla v_1 \mapsto a_{j1}\nabla...v_n \mapsto a_{jn}) = F$.

Розглянемо теорему про контрмоделі для числення F_ELR.

Теорема 5. Нехай ℘ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, збудованому для секвенції $\vdash\Gamma\dashv\Delta$, нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Тоді існують інтерпретації $A = (A, I_1)$, $B = (A, I_2)$ та $\delta, \eta\in{}^VA$ такі, що виконуються умови H_T та H_F,

Це означає: для $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ існують T-контрмодель (A, δ) та F-контрмодель (B, η).

Доведення. Переходи від нижчої вершини шляху ℘ до вищої відбуваються

згідно з відповідною секвенційною формою, тому для H виконуються умови переходу HCI, H¬CI, HCN, H¬CN, HCU, H¬CU, HNr, H¬Nr, HSΦ, H¬SΦ, HS¬, H¬S¬, HS∨, H¬S∨, H¬¬, H∨, H¬∨ та пов'язані з рівністю умови:

HES) $\vdash\neg t\equiv s\in H \Rightarrow \dashv t\equiv s\in H$; $\dashv\neg t\equiv s\in H \Rightarrow \vdash t\equiv s\in H$;

HSmS) $\vdash t\equiv s\in H \Rightarrow \vdash s\equiv t\in H$;

HTrS) $\vdash t\equiv s\in H$ та $\vdash s\equiv r\in H \Rightarrow \vdash t\equiv r\in H$;

HSES) $\vdash S^{\bar{v}}(t\equiv s,\bar{t})\in H \;\Rightarrow\; \vdash S^{\bar{v}}(t,\bar{t})\equiv S^{\bar{v}}(s,\bar{t})\in H$;

$\dashv S^{\bar{v}}(t\equiv s,\bar{t})\in H \;\Rightarrow\; \dashv S^{\bar{v}}(t,\bar{t})\equiv S^{\bar{v}}(s,\bar{t})\in H$;

H¬SES) $\vdash\neg S^{\bar{v}}(t\equiv s,\bar{t})\in H \;\Rightarrow\; \vdash\neg S^{\bar{v}}(t,\bar{t})\equiv S^{\bar{v}}(s,\bar{t})\in H$;

$\dashv\neg S^{\bar{v}}(t\equiv s,\bar{t})\in H \;\Rightarrow\; \dashv\neg S^{\bar{v}}(t,\bar{t})\equiv S^{\bar{v}}(s,\bar{t})\in H$;

HETS) $\vdash t\equiv s, \vdash S^{\bar{v},z}(\theta,\bar{r},t)\equiv\tau\in H \;\Rightarrow\; \vdash t\equiv s, \vdash S^{\bar{v},z}(\theta,\bar{r},t)\equiv\tau, \vdash S^{\bar{v},z}(\theta,\bar{r},s)\equiv\tau\in H$;

$\vdash t\equiv s, \dashv S^{\bar{v},z}(\theta,\bar{r},t)\equiv\tau\in H \;\Rightarrow\; \vdash t\equiv s, \dashv S^{\bar{v},z}(\theta,\bar{r},t)\equiv\tau, \dashv S^{\bar{v},z}(\theta,\bar{r},s)\equiv\tau\in H$;

HEΦS) $\vdash t\equiv s, \vdash S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},t)\in H \;\Rightarrow\; \vdash t\equiv s, \vdash S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},t), \vdash S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},s)\in H$;

$\vdash t\equiv s, \dashv S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},t)\in H \;\Rightarrow\; \vdash t\equiv s, \dashv S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},t), \dashv S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},s)\in H$;

H¬EΦS) $\vdash t\equiv s, \vdash\neg S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},t)\in H \;\Rightarrow\; \vdash t\equiv s, \vdash\neg S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},t), \vdash\neg S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},s)\in H$;

$\vdash t\equiv s, \dashv\neg S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},t)\in H \;\Rightarrow\; \vdash t\equiv s, \dashv\neg S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},t), \dashv\neg S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},s)\in H$.

Усі секвенції шляху $\wp$ незамкнені, тому для них не виконується умова замкненості C ∨ CLR ∨ CRfS. Отже, для H виконуються такі умови коректності:

HC) не існує формули Φ такої, що $\vdash\Phi\in H$ та $\dashv\Phi\in H$;

HCLR) не існує формул Φ та Ψ таких: $\vdash\Phi\in H, \vdash\neg\Phi\in H, \dashv\Psi\in H, \dashv\neg\Psi\in H$;

HCRfS) не існує $t\in Tr$ такого, що $\dashv t\equiv t\in H$.

Таку множину H назвемо LR_{ES}-модельною. Побудуємо контрмоделі за H.

Нехай $W=\{v_0, \ldots, v_n, \ldots\}$ – множина усіх предметних імен, що фігурують у ДНС та символах суперпозиції формул H, нехай $Dn=\{'v \mid v\in W\}$.

Нехай Tr – множина усіх нормальних термів, що фігурують в формулах H.

Задамо множину $TW=Tr\cup Dn$, нехай $TW=\{t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots\}$, де кожне $'v_j$ – це t_{kj}.

Рівність індукує на TW відношення еквівалентності: $t\sim s \Leftrightarrow \vdash t\equiv s\in H$.

Нехай $A = TW/\sim$ – фактор-множина множини TW за відношенням ~.

Позначимо $\langle t\rangle$ клас еквівалентності з представником t. Позначимо $\langle t_i\rangle$ як a_i.

Задамо $\delta=\eta=[v\mapsto\langle 'v\rangle \mid v\in W]$, тоді

$$\delta=\eta=[v_0\mapsto\langle t_{k0}\rangle,\ldots,v_j\mapsto\langle t_{kj}\rangle,\ldots]=[v_0\mapsto a_{k0},\ldots,v_j\mapsto a_{kj},\ldots].$$

Для всіх $f\in Fns$, наявних в H, визначимо f_A так, щоб виконувалась умова

$(t_i)_A(\delta)=a_i$ та $(t_i)_B(\eta)=a_i$ для всіх $t_i\in Tr$.

Для $t_{kj}='v_j$ маємо $(t_{kj})_A(\delta)=(t_i)_B(\eta)=('v_j)_A(\delta)=\langle 'v_j\rangle=a_{kj}$.

Нехай $t_m=f\in Fns$. Задаємо $f_A(\delta)=(t_m)_A(\delta)=a_m$ та $f_B(\eta)=(t_m)_B(\eta)=a_m$.

Для всіх інших $t_m\in TW$ значення задаємо індукцією за побудовою терма.

Нехай t_p – це $S^{v_{i1},\ldots,v_{in}} f\, t_{j1}\ldots t_{jn}$, де $f=t_m\in Fns$. Тоді маємо $f_A(\delta)=(t_m)_A(\delta)=a_m$, $f_B(\eta)=(t_m)_B(\eta)=a_m$, $(t_{j1})_A(\delta)=(t_{j1})_B(\eta)=a_{j1}$, …, $(t_{jn})_A(\delta)=(t_{jn})_B(\eta)=a_{jn}$. Тому задамо

$$f_A(\delta\nabla v_{i1}\mapsto a_{j1},\ldots,v_{in}\mapsto a_{jn})=f_B(\eta\nabla v_{i1}\mapsto a_{j1},\ldots,v_{in}\mapsto a_{jn})=a_p .$$

Задамо тепер значення примітивних формул та їх заперечень на δ.

Для примітивних формул вигляду $t \equiv s$ маємо (для $\neg\, t \equiv s$ це випливає з HES):

$\vdash t \equiv s \in H \Rightarrow t \sim s$, тому $(t \equiv s)_A(\delta) = T$ та $(t \equiv s)_B(\eta) \neq F$;

$\dashv t \equiv s \in H \Rightarrow$ невірно $t \sim s$, тому $(t \equiv s)_A(\delta) \neq T$ та $(t \equiv s)_B(\eta) = F$.

Для інших примітивних формул та їх заперечень задаємо так, як в теоремі 3.

Далі доводимо індукцією за складністю формули згідно з визначенням H.

Зауваження щодо вибору контрмоделі такі ж, як у випадку числень *FLR*.

Подібним чином формулюються і доводяться теореми про контрмоделі для числень F_EL та F_ER. Для F_EL маємо T-контрмодель, а для F_ER – F-контрмодель.

Розглянемо теорему про контрмоделі для числення F_EC.

Теорема 6. Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, збудованому для секвенції $\vdash\Gamma\dashv\Delta$, нехай H – множина всіх специфікованих формул секвенцій цього шляху. Тоді існують $A = (A, I)$ та $\delta \in {}^{V}\!A$ такі, що виконується умова H_C.

Побудову контрмоделі за H ведемо так, як в теоремі 5, лише інакше задаємо значення примітивних формул на δ. Для формул вигляду $t \equiv s$ задаємо так:

$\vdash t \equiv s \in H \Rightarrow t \sim s$, тому $(t \equiv s)_A(\delta) = T$;

$\dashv t \equiv s \in H \Rightarrow$ невірно $t \sim s$, тому $(t \equiv s)_A(\delta) = F$.

Для інших примітивних формул задаємо так, як в теоремі 4.

Формулювання теореми про контрмоделі для числення FC_E ідентичне формулюванню теореми 6.

У цьому випадку для модельної множини H, збудованої за незамкненим шляхом в секвенційному дереві, виконуються умови переходу HCI, HCN, HCU, HNr, HSΦ, HS¬, HS∨, H¬, H∨ та пов’язані з рівністю наступні умови:

HSmW) $\vdash t = s \in H \Rightarrow \vdash s = t \in H$;

HTrW) $\vdash t = s \in H$ та $\vdash s = r \in H \Rightarrow \vdash t = r \in H$;

HETW) $\vdash t = s, \vdash S^{\bar{v},z}(\theta,\bar{r},t) = \tau \in H \;\Rightarrow\; \vdash t = s, \vdash S^{\bar{v},z}(\theta,\bar{r},t) = \tau, \vdash S^{\bar{v},z}(\theta,\bar{r},s) = \tau \in H$;

$\vdash t = s, \dashv S^{\bar{v},z}(\theta,\bar{r},t) = \tau \in H \;\Rightarrow\; \vdash t = s, \dashv S^{\bar{v},z}(\theta,\bar{r},t) = \tau, \dashv S^{\bar{v},z}(\theta,\bar{r},s) = \tau \in H$;

HEΦW) $\vdash t = s, \vdash S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},t) \in H \;\Rightarrow\; \vdash t = s, \vdash S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},t), \vdash S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},s) \in H$;

$\vdash t = s, \dashv S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},t) \in H \;\Rightarrow\; \vdash t = s, \dashv S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},t), \dashv S^{\bar{v},z}(\Phi,\bar{r},s) \in H$;

HSEW) $\vdash S^{\bar{v}}(t = s,\bar{t}) \in H \;\Rightarrow\; \vdash S^{\bar{v}}(t,\bar{t}) = S^{\bar{v}}(s,\bar{t}) \in H$;

$\dashv S^{\bar{v}}(t = s,\bar{t}) \in H \;\Rightarrow\; \dashv S^{\bar{v}}(t,\bar{t}) = S^{\bar{v}}(s,\bar{t}) \in H$.

Усі секвенції шляху $\wp$ незамкнені, тому для H маємо умови коректності:

HC) не існує формули Φ такої, що $\vdash\Phi \in H$ та $\dashv\Phi \in H$;

HCRf_W) не існує $t \in Tr$ такого, що $\dashv t = t \in H$.

Контрмодель за H будуємо так, як в теоремах 5 і 6, лише замість ≡ беремо =.

На основі теорем про контрмоделі отримуємо теореми повноти. Вони формулюються та доводяться однотипно для всіх пропонованих числень.

Теорема 7. Нехай $\Gamma \models \Delta$. Тоді $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ вивідна (у відповідному численні).

Наведемо тут доведення для $\models_{TF}$ і числення *FLR*. Нехай супротивне: $\Gamma \models_{TF} \Delta$ та $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ невивідна. Тоді секвенційне дерево для $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ незамкнене, тому в ньому існує незамкнений шлях. Нехай H – множина всіх специфікованих формул цього шляху. Тоді за теоремою 3 існують T-контрмодель (A, δ) та F-контрмодель (B, η):

$\vdash\Phi\in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) = T$ та $\dashv\Phi\in H \Rightarrow \Phi_A(\delta) \neq T$;

$\vdash\Phi\in H \Rightarrow \Phi_B(\eta) \neq F$ та $\dashv\Phi\in H \Rightarrow \Phi_B(\eta) = F$.

Для T-контрмоделі згідно з $\vdash\Gamma\dashv\Delta\subseteq H$ для всіх $\Phi\in\Gamma$ маємо $\Phi_A(\delta) = T$, для всіх $\Psi\in\Delta$ маємо $\Psi_A(\delta) \neq T$. Звідси $\delta\in T(\Gamma_A)$ та $\delta\notin T(\Delta_A)$, звідки $T(\Gamma_A)\not\subset T(\Delta_A)$. Це заперечує $\Gamma_A|=_T\Delta$, тому й заперечує $\Gamma|=_{TF}\Delta$. Для F-контрмоделі згідно з $\vdash\Gamma\dashv\Delta\subseteq H$ для всіх $\Phi\in\Gamma$ маємо $\Phi_B(\eta)\neq F$, для всіх $\Psi\in\Delta$ маємо $\Phi_B(\eta) = F$. Звідси $\eta\notin F(\Gamma_B)$ та $\eta\in F(\Delta_B)$, тому $F(\Delta_B)\not\subset F(\Gamma_B)$. Це заперечує $\Gamma_B|=_F\Delta$, тому й заперечує $\Gamma|=_{TF}\Delta$.

На основі теорем повноти отримуємо розв'язність проблем наявності логічного наслідку для скінчених множин формул та істинності для формул.

Справді, нехай секвенція $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ скінченна. Тоді для $\vdash\Gamma\dashv\Delta$ будуємо замкнене чи незамкнене скінченне секвенційне дерево. Таким чином:

Теорема 8 (про розв'язність). 1. Нехай множини формул Γ та Δ мови БКФЛР є скінченними. Тоді алгоритмічно розв'язною є така проблема: $\Gamma|=_{IR}\Delta$.

2. Нехай множини формул Γ та Δ мови БКФЛ (мови БКФЛРС) є скінченними. Тоді алгоритмічно розв'язними є проблеми: $\Gamma|=_{TF}\Delta$; $\Gamma|=_T\Delta$; $\Gamma|=_F\Delta$; $\Gamma|=_{IR}\Delta$.

3. Для формул алгоритмічно розв'язними є проблеми неспростовновсті та тотожно істинності: $|=\Phi$ та $|=_{id}\Phi$ (мови БКФЛРС); $|=\Phi$ (мови БКФЛ та БКФЛР).

Висновки

Досліджено композиційно-номінативні логіки часткових квазіарних предикатів безкванторно-функціональних рівнів. Для безкванторно-функціональних логік та їх різновидів зі слабкою та строгою рівністю побудовано числення секвенційного типу, які формалізують відношення неспростовнісного, істиннісного, хибнісного та сильного логічного наслідку. Для цих числень наведено базові секвенційні форми та умови замкненості секвенцій, описано побудову виведення – секвенційного дерева, доведено теореми коректності та повноти. Доведення теорем про повноту опирається на теореми про існування контрмоделей для незамкненого шляху в секвенційному дереві. На базі теорем повноти отримано алгоритмічну розв'язність проблем наявності відповідного логічного наслідку для скінчених множин формул, проблем неспростовності та тотожно істинності для формул.

Література

1. Handbook of Logic in Computer Science / Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T. S. E. Maibaum. – Oxford University Press, Vol. 1–5, 1993–2000.
2. Нікітченко М.С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – К.: ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
3. Шкільняк С.С. Безкванторно-функціональні логіки часткових квазіарних предикатів / С.С. Шкільняк, Д.Б. Волковицький // Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – 2015. – Вип. 3. – С. 148–154.
4. Шкільняк С.С. Композиційно-номінативні логіки безкванторних рівнів / С.С. Шкільняк, Д.Б. Волковицький // Проблеми програмування. – 2016. – № 2–3 – С. 48–62.
5. Нікітченко М.С. Чисті першопорядкові логіки квазіарних предикатів / М.С. Нікітченко, О.С. Шкільняк, С.С. Шкільняк // Проблеми програмування. – 2016. – № 2–3. – С. 73–86.

Literatura

1. Handbook of Logic in Computer Science / Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T. S. E. Maibaum. – Oxford University Press, Vol. 1–5, 1993–2000.
2. Nikitchenko M.S. Matematychna logika ta teoria algorytmiv / M.S. Nikitchenko, S.S. Shkilniak. – К.: VPC Kyivskyi universytet, 2008. – 278 s.

3. Shkilniak S.S. Bezkvantorno-funkcionalni logiky chastkovyh kvaziarnyh predykativ / S.S. Shkilniak, D.B. Volkovyts'kyy // Visnyk Kyivskoho universytetu imeni Tarasa Shechenka. Ser.: phiz.-mat. nauky. – 2015. – Vyp. 3. – S. 148–154.
4. Shkilniak S.S. Kompozycijno-nominatyvni logiky bezkvantornyh rivniv / S.S. Shkilniak, D.B. Volkovyts'kyy // Problemy programuvannia. – 2016. – # 2–3 – S. 48–62.
5. Nikitchenko M.S. Chysti pershoporiadkovi logiky kvaziarnyh predykativ / M.S. Nikitchenko, S.S. Shkilniak // Problemy programuvannia. – 2016. – # 2–3. – S. 73–86.

RESUME

S. Shkilniak, D. Volkovytskyi

Sequent calculi for logics of free-quantifier functional levels

In this paper we propose sequent calculi for new classes of program-oriented logical formalisms – composition-nominative logics of partial quasi-ary predicates of free-quantifier level. These logics occupy intermediate position between propositional logic and first-order logics. We consider three classes of these logics: free-quantifier functional logics (FQFL), free-quantifier functional logics with composition of weak equality = (FQFLE) and with composition of strong equality ≡ (FQFLSE). The focus of the paper is devoted to construction of sequent calculi for these logics. Sequent calculi are proposed for relations of *IR*-consequence $|=_{IR}$, *T*-consequence $|=_{T}$, *F*-consequence $|=_{F}$ and *TF*-consequence $|=_{TF}$. For the $|=_{IR}$ relation in FQFL, sequent calculus *FC* is a fragment of the well-known first-order calculus, therefore we propose the following new calculi for FQFL: *FLR* for $|=_{TF}$, *FL* for $|=_{T}$, *FR* for $|=_{F}$. Transitivity of weak equality is violated for the relations $|=_{T}$, $|=_{F}$ and $|=_{TF}$ in FQFLE, thus only the $|=_{IR}$ relation remains adequate. Therefore we propose a calculus FC_E for $|=_{IR}$. For FQFLSE we propose the calculi: F_ELR for $|=_{TF}$, F_EL for $|=_{T}$, F_ER for $|=_{F}$, F_EC for $|=_{IR}$. We specify basic sequent forms and sequent closure conditions for these calculi, we describe proof construct in the introduced calculi – a sequent tree. For the proposed calculi the soundness and completeness theorems are proved. The proof of the completeness theorem is based on the theorems about a counter-model for non-closed path in the sequent tree.

Soundness and completeness theorems. $\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow$ sequent $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ is derivable.

On the base of the completeness theorem we obtain an algorithmic solvability of problems of existence of logical consequence for finite sets of formulas, irrefutability problems and identically truth problems for formulas.

Надійшла до редакції 05.10.2016

